Étude de fonctions
Limites et continuité

Ce que dit le programme :

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES	COMMENTAIRES
Limites de fonctions Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini. Limite infinie d'une fonction en un point. Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. Asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées.	• Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. • Déterminer des limites par minoration, majoration et encadrement. Interpréter graphiquement les limites obtenues.	Le travail réalisé sur les suites est étendu aux fonctions, sans formalisation excessive. L'objectif essentiel est de permettre aux élèves de s'approprier le concept de limite, tout en leur donnant les techniques de base pour déterminer des limites dans les exemples rencontrés en terminale. La composée de deux fonctions est rencontrée à cette occasion, mais sans théorie générale.
Continuité sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires	• Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone, pour résoudre un problème donné.	On se limite à une approche intuitive de la continuité et on admet que les fonctions usuelles sont continues par intervalle. On présente quelques exemples de fonctions non continues, en particulier issus de situations concrètes. Le théorème des valeurs intermédiaires est admis. On convient que les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré. On admet qu'une fonction dérivable sur un intervalle est continue sur cet intervalle. Ce cas particulier est étendu au cas où f est définie sur un intervalle ouvert ou semi-ouvert, borné ou non, les limites de f aux bornes de l'intervalle étant supposées connues. (AP) Des activités algorithmiques sont réalisées dans le cadre de la recherche de solutions de l'équation $f(x) = k$.

I. Limite d'une fonction à l'infini

1.1) Limite finie d'une fonction à l'infini

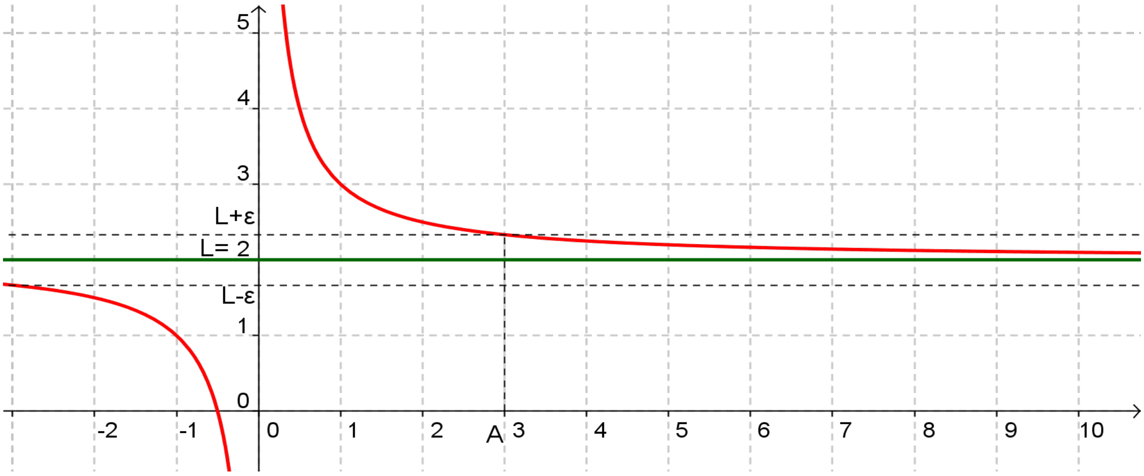
Définition 1. : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$ et L un nombre réel donné.
On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$ lorsque : « $f(x)$ devient assez proche de L lorsque x est suffisamment grand ». On écrit alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$.

Autrement dit :

Définition 1bis. : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$ et L un nombre réel donné.
On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers $+\infty$ lorsque : « tout intervalle ouvert] a ; b [contenant L, contient toutes les valeurs $f(x)$, pour tout x supérieur à un certain réel A > 0 ».

Cette définition peut s'écrire, en choisissant des intervalles ouverts *centrés en L* et de rayon **ε** > 0, aussi petit qu'on veut ; c'est-à-dire :
Pour tout nombre réel **ε** > 0 (aussi petit soit-il), il existe un réel A > 0 telle que
[si $x > A$, alors $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$].

Illustration graphique : $\lim_{x \to +\infty} \left[2 + \frac{1}{x} \right] = 2$



Limites de référence : (1) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; (2) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^k} = 0$ $k > 0$ et (3) $\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

D'une manière analogue, on peut énoncer la limite finie d'une fonction lorsque x tend vers $-\infty$. Nous obtenons les mêmes limites de référence (1) et (2) , bien sûr.

Asymptote horizontale :

Définition 2. : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$ (resp. $]-\infty\,;a[$).
Si f admet une limite finie $L \in \mathbb{R}$, lorsque x tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$), on dit que la droite d'équation « $y = L$ » est une ***asymptote horizontale*** à la courbe de f vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

1.2) Limite infinie d'une fonction à l'infini

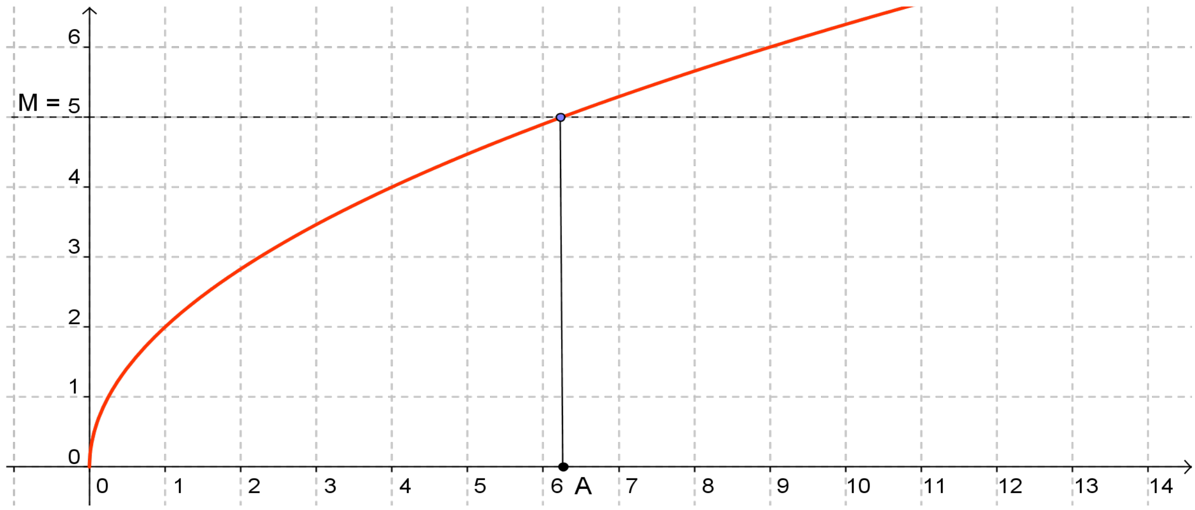
Définition 1. : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque : « $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut lorsque x devient suffisamment grand ». On écrit alors :
$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Autrement dit :

Définition 1bis. : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque : « tout intervalle de la forme $]M\,;+\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout x supérieur à un certain réel A > 0 ».

Cette définition peut encore s'écrire : Pour tout nombre réel M > 0 (aussi grand soit-il), il existe un nombre réel A > 0 tel que [si x >A , alors $f(x)$ > M].

Illustration graphique : $f(x) = 2\sqrt{x}$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$



Limites de référence :

(1) $\lim_{x\to+\infty} x=+\infty$; (2) $\lim_{x\to+\infty} x^k=+\infty$ $k>0$ et (3) $\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x}=+\infty$

D'une manière analogue, nous pouvons écrire une définition de la limite d'une fonction, égale à $-\infty$, lorsque x tend vers $+\infty$:

> **<u>Définition 2.</u>** : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$.
> On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque : « $f(x)$ devient négatif et aussi grand que l'on veut, en valeur absolue, lorsque x devient suffisamment grand ». On écrit alors $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

Autrement dit :

> **<u>Définition 2bis.</u>** : Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;+\infty[$.
> On dit que $f(x)$ tend vers $-\infty$ quand x tend vers $+\infty$ lorsque : « tout intervalle de la forme $]-\infty\,;M[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tout x supérieur à un certain réel A > 0 ».

Cette définition peut encore s'écrire : Pour tout nombre réel M < 0 (aussi grand soit-il), il existe un nombre réel A > 0 tel que [si x >A , alors $f(x)$ < M].

<u>Exemple</u> : $f(x)=-2x^2$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

De même, nous pouvons écrire une définition de la limite d'une fonction, égale à $\pm\infty$, lorsque x tend vers $-\infty$:

<u>Exemple</u> : $f(x)=2x^2+1$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$

II. Limite d'une fonction en un point

2.1) Que signifie $x \to a$?

a) Que signifie $x\to 0$?

Cela signifie que « x est suffisamment proche de 0 » ou encore que x est situé au « *voisinage de* 0 » et x prend successivement des valeurs de plus en plus proches de 0. Mais comment ? Il y a une infinité de manières.

Mais, on distingue essentiellement « deux manières principales de *tendre vers* 0 » :

- x peut tendre vers 0 en prenant des valeurs ***positives***, on écrit que « $x \to 0^+$ » et on lit « *x tend vers 0 par valeurs positives* » ou « *x tend vers 0 par valeurs supérieures* » ou encore « *x tend vers 0 à droite* ».
- x peut tendre vers 0 en prenant des valeurs ***négatives***, on écrit que « $x \to 0^-$ » et on lit « *x tend vers 0 par valeurs négatives* » ou « *x tend vers 0 par valeurs inférieures* » ou encore « *x tend vers 0 à gauche* ».

b) Que signifie $x \to a$?

Cela signifie que x prend successivement des valeurs de plus en plus proches de a.
Ce qui peut se traduire par $(x-a) \to 0$.
Comme pour 0, on distingue « deux manières principales de *tendre vers a* » :

- x tend vers a en prenant des valeurs supérieures à a, on écrit que « $x \to a^+$ » et on lit « *x tend vers a par valeurs supérieures* » ou « *x tend vers a à droite* ».
$$[x \to a^+] \text{ ssi } [(x-a) \to 0 \quad et \quad x > a] \text{ ssi } [(x-a) \to 0 \quad et \quad x-a > 0]$$
- x tend vers a en prenant des valeurs inférieures à a, on écrit que « $x \to a^-$ » et on lit « *x tend vers a par valeurs inférieures* » ou « *x tend vers a à gauche* ».
$$[x \to a^-] \text{ ssi } [(x-a) \to 0 \quad et \quad x < a] \text{ ssi } [(x-a) \to 0 \quad et \quad x-a < 0]$$

2.2) Limite finie d'une fonction en un point

Définition 1. : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et L un nombre réel donné.
On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a lorsque : « $f(x)$ devient aussi proche de L que l'on veut lorsque x est suffisamment proche de a ». On écrit alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Autrement dit :

Définition 1bis. : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et L un nombre réel donné.
On dit que $f(x)$ tend vers L quand x tend vers a lorsque : « tout intervalle ouvert contenant L contient toutes les valeurs $f(x)$ lorsque x est suffisamment proche de a ».

Cette définition peut encore s'écrire, en choisissant des intervalles ouverts *centrés en L* et de rayon $\varepsilon > 0$, aussi petit qu'on veut ; c'est-à-dire :
Pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ (aussi petit soit-il), il existe un réel $\alpha > 0$ tel que : pour tout $x \in I$: [si $a - \alpha < x < a + \alpha$, alors $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$].
Autrement dit :
[si x est suffisamment proche de a, alors $f(x)$ est suffisamment proche de L .]

On s'éloigne du programme ...

Exemple de référence :

Théorème fondamental : Soit P une fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
Alors, les limites de $P(x)$ à droite et à gauche de a sont identiques et :
$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

Exemple : Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par : $P(x) = 3x^2 - 5x + 7$
$\lim_{x \to 0} P(x) = P(0) = 3 \times 0^2 - 5 \times 0 + 7 = 7$ donc $\lim_{x \to 0} P(x) = 7$. De même : $\lim_{x \to 1} P(x) = 5$

2.3) Limite infinie d'une fonction en un point

Définition 1. : Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et $a \in I$.
On dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ (resp. $-\infty$) quand x tend vers a lorsque : « $f(x)$ devient aussi grand que l'on veut (resp. devient négatif et aussi grand que l'on veut en valeur absolue) lorsque x est suffisamment proche de a ».
On écrit $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$ (resp. $-\infty$).

Asymptote verticale :

Définition 2. : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.
Si $\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty$ (resp.) $\lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$, on dit que la droite d'équation « $x = a$ » est une ***asymptote verticale*** à la courbe de f.

Exemples de référence :

Limite de la fonction inverse en 0 ?

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Donc, la droite d'équation $y = 0$ est une *asymptote verticale* à la courbe.

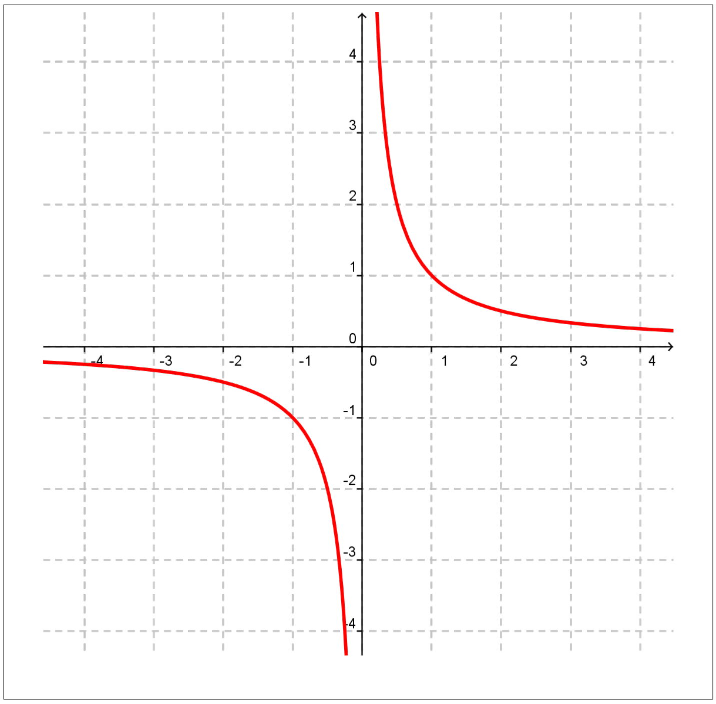
De même, si k est impair :

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^k} = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^k} = -\infty$

De même, si k est pair :

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^k} = +\infty$ et $\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^k} = +\infty$

Enfin : $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$.



III. Opérations sur les limites de fonctions

Comme pour les suites, les résultats de certaines opérations sur les limites sont intuitives et parfaitement ***déterminées***. D'autres opérations mènent à des « ***formes indéterminées*** » (indiquées par *F.I.*), c'est-à-dire qu'elles conduisent à plusieurs résultats possibles, donc qui ne sont pas parfaitement ***déterminées***. Il faudra alors user

de différentes méthodes et techniques pour « ***lever l'indétermination*** ». Notamment, *factoriser une somme*, *développer un produit*, séparer une fraction en plusieurs parties, ou multiplier le numérateur et le dénominateur par la *quantité conjuguée*.

Soit a un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$. l et l' sont des nombres réels. Nous allons résumer les opérations sur les limites de fonctions dans les deux tableaux suivants :

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a et $g(x)$ ne s'annulant pas au voisinage de a sauf peut être en a. Le tableau suivant donne les limites des fonctions $f+g$, $f-g$ et fg si elle existe, lorsque x tend vers a :

Limite de $f(x)$	Limite de $g(x)$	Limite de $f(x)+g(x)$	Limite de $f(x)-g(x)$	Limite de $f(x)\,g(x)$
l	$l'\neq 0$	$l+l'$	$l-l'$	$l\,l'$
0	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*
0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	*F.I.*
$-\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	*F.I.*	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	*F.I.*	$+\infty$

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de a et $g(x)$ ne s'annulant pas au voisinage de a sauf peut être en a. Le tableau suivant donne la limite de la fonction f/g , lorsqu'elle existe :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ / $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$	$l\neq 0$	**0** et $f(x)<0$ au voisinage de a on note $\mathbf{0^-}$	**0** et $f(x)>0$ au voisinage de a on note $\mathbf{0^+}$	$-\infty$	$+\infty$
$l'\neq 0$	$\dfrac{l}{l'}$	0	0	$-\infty$ si $l'>0$ $+\infty$ si $l'<0$	$-\infty$ si $l'<0$ $+\infty$ si $l'>0$
$\mathbf{0^-}$	$-\infty$ si $l>0$ $+\infty$ *si* $l<0$	*F.I.*	*F.I.*	$+\infty$	$-\infty$
$\mathbf{0^+}$	$-\infty$ si $l<0$ $+\infty$ *si* $l>0$	*F.I.*	*F.I.*	$-\infty$	$+\infty$
$-\infty$	0	0	0	*F.I.*	*F.I.*
$+\infty$	0	0	0	*F.I.*	*F.I.*

Exemples : Calculer les limites suivantes :

$f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^3-1}$ en $x=1$	$g(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x^2-1}$ en $x=1$

IV. Fonctions composées et limites

4.1) Notion de fonction composée

Définition 1. : Soit f et u deux fonctions de la variable réelle.
On appelle fonction composée de u par f la fonction notée $f\circ u$ qui à chaque x associe $(f\circ u)(x)=f(u(x))$. La notation « $f\circ u$ » se lit « ***f* rond *u*** ».

Remarque : La fonction $f\circ u$ est définie pour tout nombre réel x pour lequel $u(x)$ existe et $u(x)$ appartient au domaine de définition de f.

$$x\in D_{f\,o\,u} \text{ (ssi) } [\ x\in D_u \text{ et } u(x)\in D_f\ ]$$

Exemple : $f(x)=2x^3$ et $u(x)=5x+7$
alors, $(f\circ u)(x)=f(u(x))=f(5x+7)=2(5x+7)^3$
On pourrait utiliser une « *variable relai* » ***X = u(x)***. On a alors :
$X=u(x)$ donc $X=5x+7$ et $f(X)=2X^3$ donc
$(f\circ u)(x)=f(u(x))=f(X)=2X^3=2(5x+7)^3$

Remarque : La composition des fonctions n'est pas une opération commutative !!
Si on change l'ordre des fonctions, on obtient une fonction composée différente.
$(u\circ f)(x)=u(f(x))=u(2x^3)=5\times(2x^3)+7=10x^3+7$

4.2) Limite d'une fonction composée

Théorème de la limite d'une fonction composée. : Soit f et u deux fonctions de la variable réelle. a, b et c désignent des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$. Alors :

$$\text{Si } \lim_{x\to a} u(x)=b \text{ et } \lim_{x\to b} f(x)=c \text{ , alors } \lim_{x\to a} f(u(x))=c$$

On pourrait utiliser notre « *variable relai* » ***X = u(x)***. On a alors :
$X=u(x)$ donc : $(f\circ u)(x)=f(u(x))=f(X)$ donc

$\lim\limits_{x\to a} u(x)=b$ et $\lim\limits_{X\to b} f(X)=c$ Équivaut à $\underset{x\to a}{X\to b}$ et $\lim\limits_{X\to b} f(X)=c$

Autrement dit :
*Pour calculer la limite d'une fonction composée, il suffit de calculer les limites « **au fur et à mesure** » en commençant par les limites des expressions les « plus intérieures ».*

Exemple : Déterminer la limite de la fonction $h: x\mapsto \sqrt{2+\dfrac{1}{x^2}}$ lorsque x tend vers + l'infini. Cette fonction est la composée des deux fonctions :
$u: x\mapsto 2+\dfrac{1}{x^2}$ par la fonction $f: x\mapsto \sqrt{x}$. On pose $X=u(x)=2+\dfrac{1}{x^2}$.
$\lim\limits_{x\to+\infty} u(x)=2$. Donc $\underset{x\to+\infty}{X\to 2}$ et $\lim\limits_{X\to 2} f(X)=\sqrt{2}$.
Par conséquent. $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)=\sqrt{2}$.

V. Limites et comparaison

5.1) Théorèmes de comparaison

Théorème 1. : Soit I un intervalle et a désigne soit un nombre réel $a \in I$, soit $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f et g deux fonctions définies sur I telles que pour tout $x \in I$: $f(x) \leqslant g(x)$, alors :

1°) Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$

2°) Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to a} g(x) = +\infty$.

Comme pour les suites, nous avons un deuxième théorème de comparaison très important, appelé très souvent « ***le théorème des gendarmes*** » :

Théorème de comparaison dit « ***des gendarmes*** »

Théorème 2. : Soit I un intervalle et a désigne soit un nombre réel $a \in I$, soit $+\infty$ ou $-\infty$. Soient f, g et h trois fonctions définies sur I telles que pour tout $x \in I$: $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$, alors :

Si $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \lim\limits_{x \to a} h(x) = l \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = l$

Exemple : Déterminer la limite de la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x\sin(5x^2)}{x^2+1}$ lorsque x tend vers + l'infini.

Remarque : *C'est le même exemple que nous avions choisi pour les suites.*

On sait que pour tout nombre réel x : $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.
Donc, pour tout nombre réel x : $-1 \leqslant \sin(5x^2) \leqslant 1$.
D'autre part, pour tout nombre réel $x > 0$: $\dfrac{2x}{x^2+1} > 0$. En multipliant les trois membres de l'inégalité précédente par ce nombre strictement positif, on obtient :

$$\frac{-2x}{x^2+1} \leqslant \frac{2x\sin(5x^2)}{x^2+1} \leqslant \frac{2x}{x^2+1} .$$

Or les deux fonctions g et h définies par $g(x) = \dfrac{-2x}{x^2+1}$ et $h(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ admettent toutes les deux la même limite **finie** égale à 0 en +l'infini. Donc, d'après le théorème de comparaison (théorème des gendarmes), $f(x)$ tend vers cette même limite 0.

Conclusion : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

VI. Continuité d'une fonction

6.1) Étude d'un exemple

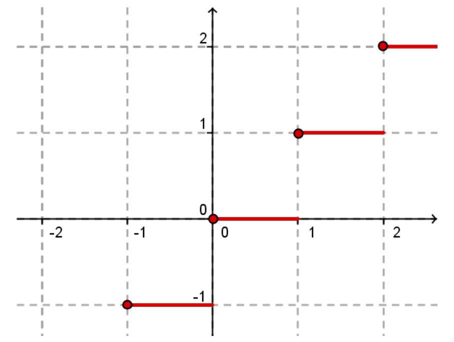
E est la fonction « partie entière » définie sur $\mathbb{R}$ comme suit. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
E(x) = n, si et seulement si, ***n est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x***.
Autrement dit :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $n \leqslant E(x) < n+1$

Ainsi : $E(2{,}1)=2$; $E(\pi)=3$; $E(2/3)=0$; $E(-2)=-2$ et $E(-0{,}5)=?$

Construire la courbe de la fonction partie entière sur l'intervalle [–1 ; 2,5 [.

Que constate-t-on ? Sur l'intervalle [0 ; 1[et [1 ; 2[; puis sur les intervalles de la forme $[n\,;\,n+1[$, $n\in\mathbb{Z}$
Que se passe-t-il au point 1 ?
Et en tout point d'abscisse entière ?



La courbe de la fonction partie entière est « *constante sur chacun des intervalles de la forme* $[n\,;\,n+1[$, $n\in\mathbb{Z}$ ». La fonction est donc *continue* sur chacun de ces intervalles.

Globalement, elle n'est pas construite « *d'un seul trait* », « *sans lever le crayon* ». On dit qu'elle est *discontinue* sur $\mathbb{R}$. On remarque même qu'elle est discontinue en tout point d'abscisse entière. Prenons par exemple, au point d'abscisse 1 :

– A gauche de 1, la fonction est constante et égale à 0 ; donc $\lim\limits_{x\to 1^-} E(x)=0$
– A droite de 1, la fonction est constante et égale à 1 ; donc $\lim\limits_{x\to 1^+} E(x)=1$

Il est clair que les deux morceaux de courbe *ne se recollent pas*.
Par conséquent, la fonction E est discontinue bien en 1.

6.2) Continuité en un point

<u>Définition 1.</u> : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a\in I$.
On dit que la fonction f est ***continue au point a*** si et seulement si $f(a)$ existe et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers a existe et est égale à $f(a)$.
<u>Autrement dit</u> : f est *continue au point a* ssi $f(a)$ existe et $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Autrement dit :

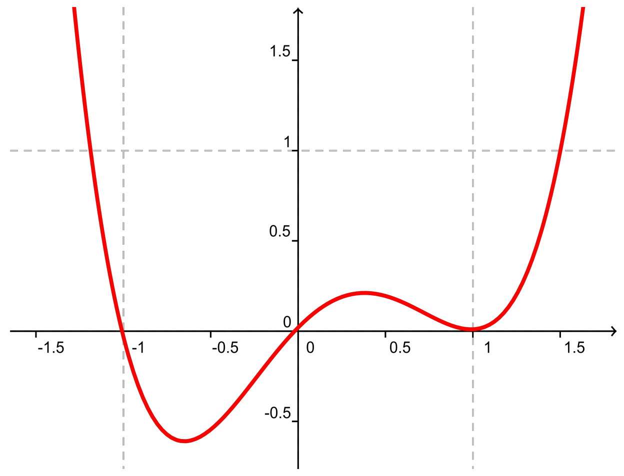
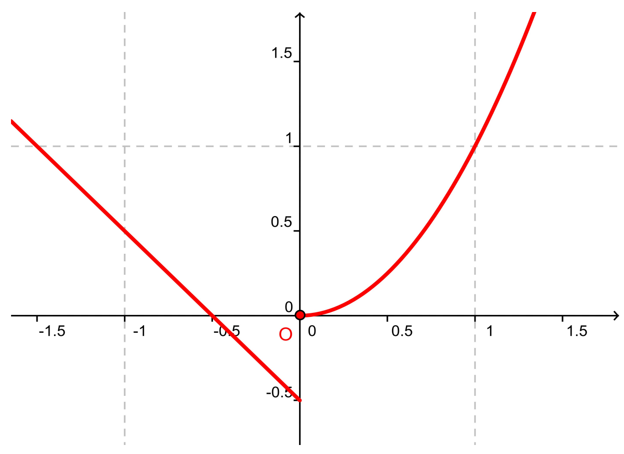
<u>Définition 1bis.</u> : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a\in I$. La fonction f est *continue au point a* si et seulement si $f(a)$ existe et les deux limites de $f(x)$ à gauche et à droite de a, <u>existent</u> et sont <u>*égales*</u> *à* $f(a)$.

<u>Définition 2.</u> : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction f est *continue sur l'intervalle I* si et seulement si f est *continue en tout point a de I*.

<u>Exemples</u> : Parmi les fonctions de référence, les fonctions affines, les fonctions du second degré, sont définies et continues sur tout $\mathbb{R}$, donc sur tout intervalle de $\mathbb{R}$.

La fonction racine carrée est continue sur $[0\,;+\infty[$. La fonction inverse est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$. Elle n'est pas définie en 0. On ne peut donc pas parler de continuité en 0.

Interprétation graphique :

	
La courbe ci-dessus représente une ***fonction continue*** sur tout $\mathbb{R}$. La courbe est tracée « *d'un seul trait sans lever le crayon* ».	La courbe ci-dessus représente une fonction continue sur chacun des deux intervalles $]-\infty\,;0[$ et $]0\,;+\infty[$; mais par sur $\mathbb{R}$. Elle est discontinue en 0. *Les limites de f (x) à gauche et à droite existent mais sont différentes*.

Définition 2bis. : Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que la fonction f est ***discontinue sur l'intervalle I*** si, et seulement si, *il existe au moins un point $a \in I$ où f n'est pas continue*.

Exemples fondamentaux : Trois types de fonctions continues sont donnés par les théorèmes suivants :

Théorème 1. : Toutes les fonctions *polynômes* sont définies et *continues* sur tout $\mathbb{R}$, donc sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

Théorème 2. : Toute fonction *dérivable* en un point $a \in I$ est *continue* en *a*.

Théorème 3. : Toute fonction *composée* de fonctions continues en un point $a \in I$ est *continue* en *a*.

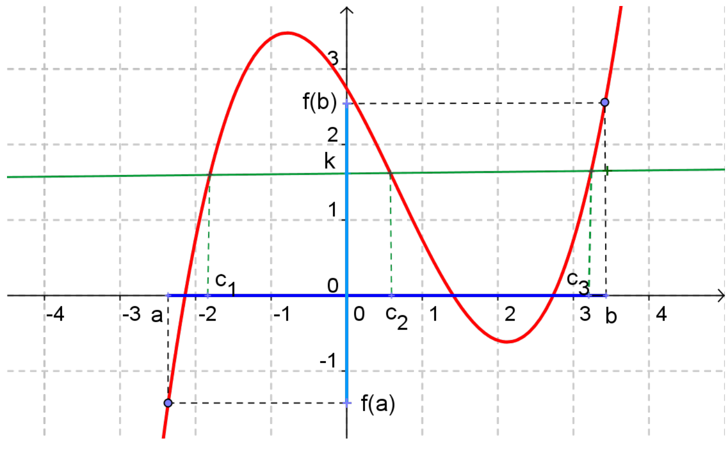
Exemple : La fonction de référence f définie par : $f(x)=\sqrt{x}$ est définie et continue sur $[0\,;+\infty[$. La fonction polynôme *u* définie par : $u(x)=3x^2+4$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
On considère la fonction *h* définie par : $h(x)=\sqrt{3x^2+4}=(f\circ u)(x)$. *h* est définie et continue sur tout $\mathbb{R}$ comme *composée de deux fonctions continues*, puisque pour tout $x\in\mathbb{R}$: $u(x)$ est strictement positif.

6.3) Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 4. (T.v.i.) : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a,b]$. Alors pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c\in[a\,;b]$ tel que $f(c)=k$.
On dit que toutes les *valeurs intermédiaires* entre $f(a)$ et $f(b)$ sont ***atteintes*** par la fonction f au moins une fois.

Remarque : On n'a pas parlé de l'intervalle $[f(a) ; f(b)]$, ni de $[f(b) ; f(a)]$ car, pour l'instant, on ne sait pas a priori, laquelle des deux valeurs est plus grande que l'autre.

Illustration graphique



Dans notre cas de figure, selon la position de k dans l'intervalle $[f(a) ; f(b)]$, il existe ***une, deux*** ou ***trois*** valeurs de $c \in [a ; b]$ telles que $f(c) = k$.

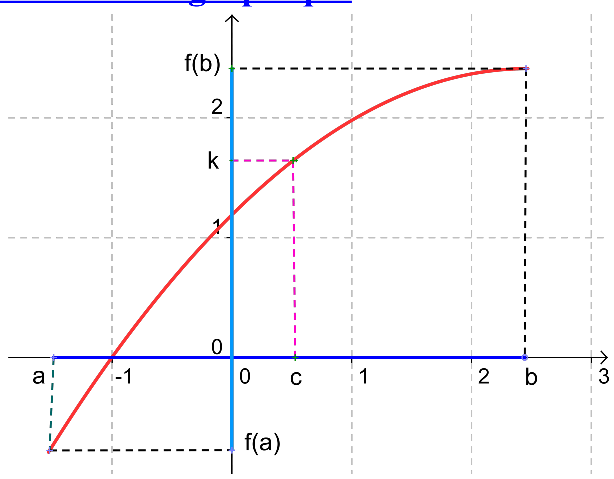
Par conséquent, dans ce cas général, il existe ***au moins*** un $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) = k$.

Un ***corollaire*** est une conséquence directe et immédiate du théorème précédent.
En général, c'est une version du théorème dans un cas particulier.

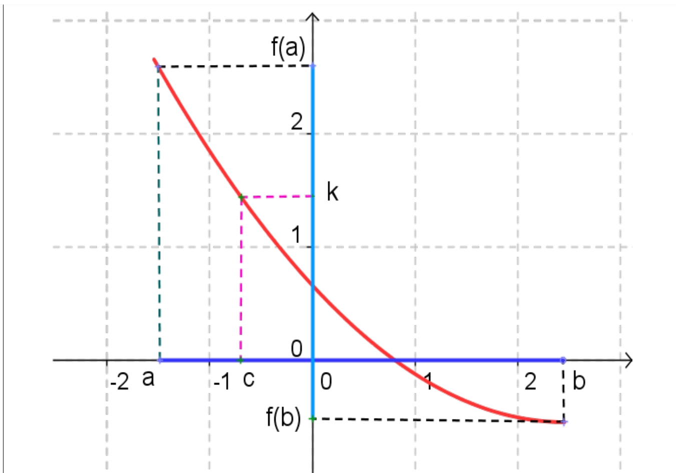
Corollaire n°1 (du T.v.i.) : Soit f une fonction définie et continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur un intervalle $[a,b]$. Alors pour tout nombre réel $k \in [f(a); f(b)]$ (resp. $k \in [f(b); f(a)]$), il existe un unique réel $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) = k$.

On dit que toutes les *valeurs intermédiaires* entre $f(a)$ et $f(b)$ sont ***atteintes exactement une fois*** par la fonction f.

Illustration graphique



f continue et strictement croissante, alors pour tout nombre réel $k \in [f(a); f(b)]$; il existe un unique réel $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) = k$.



f continue et strictement décroissante, alors pour tout nombre réel $k \in [f(a); f(b)]$, il existe un unique réel $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) = k$.

Corollaire n°2 (du T.v.i.) : Soit f une fonction définie et continue et strictement croissante (resp. strictement décroissante) sur un intervalle $[a,b]$ et telle que $f(a) \times f(b) < 0$, il existe un unique réel $c \in [a ; b]$ tel que $f(c) = 0$.

Ce corollaire est une conséquence immédiate du corollaire n°1. En effet, il suffit de prendre $k = 0$ dans le corollaire n°1.

Dire que $f(a)\times f(b)<0$ signifie que « $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires », donc « 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ ».

6.4) Application du T.v.i. à la résolution d'équations

Voir : **Fiche BAC n°3**.